Marc Noy rep el Premi Humboldt

El professor Marc Noy, catedràtic de la Universitat Politècnica de Catalunya i un dels millors investigadors en matemàtiques de Catalunya i Espanya, ha estat un dels guardonats amb el Premi Humboldt d'Investigació 2012 en l'àrea de les matemàtiques. Aquest premi, atorgat per la Fundació Alexander von Humboldt, es dóna com a reconeixement a un investigador en matemàtiques per les seves descobertes fonamentals i noves teories o idees que hagin tingut un impacte significatiu en la seva pròpia disciplina, i del qual s'espera que continuï produint èxits d'avantguarda en el futur.

El professor Noy ha estat distingit per les seves contribucions a l'estudi de les estructures combinatòries aleatòries usant mètodes analítics. Amb els seus col·laboradors, ha trobat fórmules precises per a descriure el comportament asimptòtic del nombre de grafs planars, l'estadística i les lleis de probabilitat dels invariants bàsics dels grafs planars aleatoris, i ha estès alguns d'aquests resultats a grafs en superfícies i a certes classes de grafs tancades per menors.

La Fundació Alexander von Humboldt concedeix diversos premis d'investigació cada any, i els guanyadors són convidats a passar un període de temps cooperant en un projecte d'investigació amb especialistes d'una institució de recerca alemanya. El professor Noy visitarà el Department de Matemàtiques a la Universitat Tècnica de Munich, per treballar-hi amb el professor Anusch Taraz, membre del grup de recerca en geometria aplicada i matemàtica discreta d'aquella institució.

Podeu trobar més informació al web `http://www.humboldt-foundation.de/`

Societat Catalana de Matemàtiques

Guardonats en la convocatòria 2012

- El Premi Évariste Galois ha estat atorgat a Xavier Ros pel treball "EDP de reacció-difusió, desigualtats isoperimètriques i pesos monomials"; a Jordi Delgado pel treball "Problemes algorísmics en grups lliures per lliure-abelià"; a Carlos de Vera pel treball "Punts racionals en corbes de Shimura sobre cossos quadràtics imaginaris".

  Aquest premi fou lliurat el passat 26 d'abril en l'acte de lliurament de premis i borses d'estudi de l'Institut d'Estudis Catalans.

Ressenyes d'obres guardonades

Xavier Ros, «EDP de reacció-difusió, desigualtats isoperimètriques i pesos monomials». Premi Évariste Galois 2012

El treball presenta els resultats obtinguts per l'autor en el seu estudi d'equacions de reacció-difusió i, com a conseqüència, algunes noves desigualtats isoperimètriques i de Sobolev.

La primera part del treball tracta la regularitat dels minimitzants d'algunes equacions en derivades parcials (EDP) no lineals —un problema clàssic en el càlcul de variacions que apareix, per exemple, en el problema número 19 de Hilbert. Un exemple important en geometria és la regularitat de les hipersuperfícies mínimes de $\mathbb{R}^n$ que són minimitzants del funcional d'àrea. Un resultat profund dels anys seixanta estableix que aquestes hipersuperfícies són regulars si $n \leq 7$, mentre a $\mathbb{R}^8$ el con de Simons és un minimitzant del funcional d'àrea amb una singularitat al 0. El mateix fenomen —el fet que els minimitzants són regulars només en dimensions baixes— es dóna en altres equacions no lineals en dominis acotats. Per exemple, considerem el problema semilineal $-\Delta u = f(u)$ a Ω, $u = 0$ a $\partial\Omega$. Aquests problemes de reacció-difusió modelen diversos fenòmens en la física (fluids, combustió, etc.), la biologia i l'ecologia (evolució de poblacions, propagació de malalties, etc.), i apareixen també en alguns problemes geomètrics (com preescriure la curvatura en una varietat o la classificació conforme de

varietats). Una important qüestió oberta és si els minimitzants locals (o, més en general, les solucions estables) d'aquesta classe d'equacions tenen o no singularitats per $n \leq 9$. La questió ja ha estat estudiada des dels anys setanta per diverses nolinealitats f —essencialment exponencial i potència— i més recentment per f general quan Ω és una bola. En tots els casos es té un resultat similar: si $n \leq 9$ aleshores tota solució estable u és regular, mentre per $n \geq 10$ hi ha exemples de solucions estables no fitades. Per a f i Ω generals els resultats més importants són de G. Nedev (2000) i de X. Cabré (2010): van demostrar que aquestes solucions són regulars per tota f en dimensions $n \leq 3$ i $n = 4$, respectivament. Nosaltres estudiem la regularitat de les solucions estables en una classe de dominis que anomenem de doble revolució.

Aquests són els dominis invariants sota rotacions de les primeres m variables i de les últimes $n-m$ variables. El nostre resultat principal és el següent: quan Ω és un domini de doble revolució convex i $n \leq 7$, les solucions estables són regulars per tota f. A més, quan $n \geq 8$ donem cotes L^p per u. És en aquesta demostració on es requereixen les següents desigualtats de Sobolev amb pesos monomials

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n, x^A dx)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n, x^A dx)},$$

on $x^A := |x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{A_n}$, u és qualsevol funció C^1 a suport compacte i $q > p$.

Aquestes desigualtats eren desconegudes quan els nombres A_i no són enters. En canvi, vam observar que quan els nombres A_i són tots enters positius, aquestes desigualtats són ben conegudes. En efecte, en aquest cas x^A és el jacobià del canvi de variables de $\mathbb{R}^{A_1+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{A_n+1}$ en $\mathbb{R}^n$ donat per $(x_1, ..., x_n) = (|z_1|, ..., |z_n|)$, on $x \in \mathbb{R}^n$ i $z_i \in \mathbb{R}^{A_i+1}$, i per tant la desigualtat amb el pes x^A és exactament la desigualtat de Sobolev clàssica escrita en aquestes coordenades "radials". A més, el laplacià escrit en aquestes coordenades es transforma en l'operador $x^{-A}\mathrm{div}(x^A \nabla u)$.

L'objectiu de la segona part del treball és demostrar les desigualtats de Sobolev amb el pes x^A per a nombres reals $A_1 \geq 0$, ..., $A_n \geq 0$ qualssevol i trobar l'exponent òptim q (que depèn de $A_1, ..., A_n$) per al qual són certes. També obtenim una expressió explícita de la millor constant C_p en la desigualtat, així com les funcions extremals on aquesta constant és assolida. A més, també provem versions amb pesos monomials de les clàssiques desigualtats de Morrey i Trudinger.

La demostració d'aquesta desigualtat de Sobolev està basada en una nova desigualtat isoperimètrica amb pesos monomials i amb constant òptima. La millor constant s'assoleix per dominis de la forma $\Omega = B_R(0) \cap (0, +\infty)^n$. És sorprenent el fet que els pesos que considerem no són radials però, en canvi, els conjunts òptims sí que ho són. Aquesta desigualtat isoperimètrica l'establim adaptant una prova dels anys noranta de X. Cabré de la desigualtat isoperimètrica clàssica a $\mathbb{R}^n$. En el nostre cas, la idea principal és usar un problema de Neumann lineal per l'operador $x^{-A}\mathrm{div}(x^A \nabla \cdot)$ combinat amb una variació del mètode ABP.

Aquesta demostració —de fet, l'intent de discutir els casos d'igualtat— ens porta a estudiar l'operador $x^{-A}\mathrm{div}(x^A \nabla \cdot)$. Trobem una expressió pel nucli de la calor d'aquest operador i demostrem una propietat de la mitjana per a solucions febles de $x^{-A}\mathrm{div}(x^A \nabla u) = 0$, cosa que ens permet provar la regularitat C^∞ d'aquestes funcions. De fet, els resultats obtinguts s'apliquen no només a aquest operador sinó també a operadors una mica més generals, que inclouen per exemple $|x|^{-p}\mathrm{div}(|x|^p \nabla \cdot)$.

Finalment, la desigualtat isoperimètrica anterior ens ha portat a estudiar desigualtats isoperimètriques amb un pes homogeni general w de grau $\alpha \geq 0$. El principal resultat que obtenim és el següent: si Σ és un con convex i $w^{1/\alpha}$ és una funció còncava a Σ, aleshores es compleix una desigualtat isoperimètrica a Σ amb el pes w, i els conjunts que minimitzen el quocient isoperimètric són les boles centrades a l'origen intersecades amb el con. És bastant sorprenent el fet que, tot i que els pesos w que considerem no són necessàriament radials, els conjunts que resolen el problema isoperimètric sí que ho són. Quan $w \equiv 1$ aquest resultat és ben conegut: la desigualtat isoperimètrica en cons convexos (sense pesos) va ser demostrada el 1990 per P. L. Lions i F. Pacella. La nostra demostració d'aquestes desigualtats isoperimètriques és totalment diferent a la de Lions-Pacella i, per tant, en particular donem una nova prova de la seva desigualtat.

Introducció

L'objectiu principal de la teoria combinatòria i geomètrica de grups (CGGT) és l'estudi dels grups discrets infinits des de dos punts de vista: el *combinatori*, en què els elements del grup vénen donats per seqüències de símbols sotmeses a certes regles; i el *geomètric*, en què s'extreu informació sobre els grups a partir d'objectes geomètrics (com ara grafs o superfícies) que els involucren.

Un dels temes recurrents en la CGGT és l'estudi de *problemes algorísmics* (de decisió o de cerca) sobre grups. Intuïtivament, un *problema de decisió* consisteix a, donada una entrada (pertanyent a un conjunt d'entrades establert), decidir si aquesta compleix o no una certa propietat; mentre que un *problema de cerca* consisteix a, donada una entrada, trobar (en cas que existeixi) una resposta que compleixi certa propietat respecte a l'entrada. Es diu que un problema és *decidible* (o *resoluble*) quan existeix un algorisme per a resoldre'l.

Els primers problemes de decisió en teoria de grups es remunten a principis del segle passat quan Max Dehn, estudiant de geometria i topologia, va veure que moltes de les qüestions amb les quals estava tractant es podien reduir a preguntes sobre grups. En particular, fou el primer a apreciar la rellevància del problema de la paraula, que juntament amb els de la conjugació i l'isomorfisme (actualment anomenats *problemes fonamentals de Dehn*), es pot considerar que constitueixen el germen de la disciplina.

A partir d'aquests, s'ha anat desenvolupant tota una varietat de problemes algorísmics referents a diversos aspectes algebraics dels grups. Detallem a continuació els que tenen més rellevància en el nostre estudi. Per a un grup G qualsevol:

- El *problema de la pertinència* consisteix a decidir, donada una família finita $\{w, w_1, \ldots, w_s\}$ de paraules descrivint elements de G, si la primera pertany al subgrup generat per la resta; i, en cas afirmatiu, trobar una expressió de w en termes de $\{w_1, \ldots, w_s\}$.

- El *problema de l'índex finit* consisteix a decidir, donada una família finita de paraules descrivint elements de G, si el subgrup que generen té índex finit a G; i en cas afirmatiu, calcular una família de representants de les classes laterals.

- El *problema de la intersecció* de subgrups consisteix a decidir, donades dues famílies finites d'elements de G, si la intersecció dels subgrups que generen és també finitament generada; i en cas afirmatiu, calcular-ne una família de generadors.

- El *problema dels punts fixos* consisteix a decidir, donat un endomorfisme qualsevol de G, si el subgrup de punts fixos per aquest és finitament generat; i en cas afirmatiu, calcular-ne una família de generadors.

- El *problema de la conjugació torçada* consisteix a decidir, donats dos elements $u, v \in G$ i un automorfisme φ de G, si aquests són φ-conjugats a G; és a dir, si existeix un element $w \in G$ tal que $(w\varphi)^{-1}\, u\, w = v$ (el cas $\varphi = Id_G$ correspon exactament al problema de la conjugació).

- El *problema de Whitehead* consisteix a decidir, donats dos elements qualssevol de G, si existeix un automorfisme (endo, mono, epi) de G enviant l'un a l'altre.

Aquest treball té com a objectiu principal l'estudi dels problemes anteriors sobre grups *lliures per lliure-abelià*, $F_n \times \mathbb{Z}^m$. Malgrat que les respectives versions de cada problema sobre els factors (F_n i $\mathbb{Z}^m$) són ben conegudes i apareixen sovint com a subproblemes del nostre, l'estudi realitzat mostra que en general no són, ni molt menys, suficients per a resoldre el corresponent problema a $F_n \times \mathbb{Z}^m$. Recordem, per exemple, que la propietat de Howson (la intersecció de dos subgrups finitament generats és finitament generada), vàlida tant a $\mathbb{Z}^m$ com a F_n, ni tan sols es compleix a $F_2 \times \mathbb{Z}$.

La primera part del treball està dedicada a l'estudi d'aquesta família de grups i la segona a resoldre la llista de problemes algorísmics esmentada més amunt.

Grups lliures per lliure-abelià

Serà convenient considerar els grups $F_n \times \mathbb{Z}^m$ com a donats per la presentació $\langle X \cup T \mid [X \cup T, T] \rangle$, on $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ i $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ són conjunts finits (potser

buits) disjunts de símbols i $[A, B]$ designa el conjunt de commutadors d'A amb B. És a dir, pensarem els elements de $F_n \times \mathbb{Z}^m$ com a cadenes finites de t_j's, x_i's i els seus inversos, amb el benentès que les t_j's commuten amb tots els símbols. Podem, per tant, acumular-les ordenadament (per exemple a l'esquerra) i obtenir per als elements de $F_n \times \mathbb{Z}^m$ la següent *forma normal* $\mathbf{t}^{\mathbf{a}} u$: $eq t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_m^{a_m}\, u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on $\mathbf{a}$: $eq(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$ i $u = u(x_1, \ldots, x_n) \in F_n$ és una paraula lliure en base X.

És ben sabut que els subgrups dels grups lliure-abelians són lliure-abelians (de rang com a molt el rang ambient) i que els subgrups dels grups lliures són lliures (sense restricció de rangs). Aquests dos fets condueixen a una propietat anàloga pels nostres grups: els grups lliures per lliure-abelià són tancats per subgrups. Concretament, si $H \leqslant F_n \times \mathbb{Z}^m$, aleshores $H \simeq F_{n'} \times \mathbb{Z}^{m'}$, on $n \in [0, \infty]$ i $m' \in [0, m]$.

Observem que $F_1 \times \mathbb{Z}^m \simeq F_0 \times \mathbb{Z}^{m+1}$ i per tant els rangs de les parts lliure i lliure-abeliana no són invariants de $F_n \times \mathbb{Z}^m$. No obstant això, és fàcil veure que aquesta és l'única possible redundància, la qual cosa ens permet (excloent el cas $n = 1$) definir de forma molt natural nocions de rang i base per als nostres grups que estenen les homònimes a F_n i $\mathbb{Z}^m$. Així, per a un subgrup $H \leqslant F_n \times \mathbb{Z}^m$, anomenem *rang* d'$H$ l'únic parell $(m', n') \in [1, m] \times [0, \infty] \setminus \{1\}$ tal que $H \simeq F_{n'} \times \mathbb{Z}^{m'}$; i *base* d'$H$ qualsevol conjunt obtingut unint una base de cadascun dels factors d'H a la descomposició anterior. A més, es pot veure que si el subgrup H ve donat per una família finita de generadors, aleshores disposem d'un procediment algorísmic per a calcular una base d'H i expressar-la en termes dels generadors inicials.

Pel que fa als endomorfismes, és clar que associats a les parts lliure i lliure-abeliana, emergiran com a constituents de cada $\Psi \in \mathrm{End}(F_n \times \mathbb{Z}^m)$ endomorfismes respectius, ϕ de F_n, i $\mathbf{Q}$ de $\mathbb{Z}^m$. Veurem que, excepte en un cas degenerat (que no inclou epimorfismes ni monomorfismes), els endomorfismes de $F_n \times \mathbb{Z}^m$ es poden descriure en termes de ϕ, $\mathbf{Q}$ i una matriu $\mathbf{P}$ que controla l'aparició de lletres $t_j^{\text{'s}}$ a la imatge de x_i sota Ψ.

A partir d'aquestes descripcions obtenim expressions per a la composició de qualsevol parell d'endomorfismes. Veiem, a més, que les caracteritzacions d'injectivitat i exhaustivitat d'endomorfismes tan sols involucren a ϕ i $\mathbf{Q}$, i es poden donar de forma senzilla i molt natural en termes d'aquests.

Implícita en la descripció anterior està, per suposat, tant la hopfianitat i no-cohopfianitat de $F_n \times \mathbb{Z}^m$ com la descripció del seu grup d'automorfismes, per al qual es dedueix fàcilment el seu caràcter finitament generat.

Problemes algorísmics a $F_n \times \mathbb{Z}^m$

Una vegada estudiats els grups lliures per lliure-abelià i establerta la connexió entre aquests i els seus factors, es fa patent que molts dels problemes de decisió a $F_n \times \mathbb{Z}^m$ es traduiran en les respectives versions del problema sobre les parts lliure i lliure-abeliana, juntament amb una certa complicació derivada de la manera com estan entrellaçades ambdues parts.

Resumim a continuació en un únic enunciat els resultats algorísmics fonamentals obtinguts (*i.e.* els problemes algorísmics que hem resolt a $F_n \times \mathbb{Z}^m$ d'acord amb l'esquema anterior).

Teorema. *Els següents problemes algorísmics són decidibles a $F_n \times \mathbb{Z}^m$: els problemes de la paraula i la conjugació, el de l'isomorfisme, el de la pertinença, el de l'índex finit, el problema de la intersecció de subgrups i de classes laterals, el dels punts fixos, el de la conjugació torçada, i els problemes de Whitehead per a endomorfismes, monomorfismes i automorfismes.*

En definitiva, aquest treball suposa un primer pas en la generalització de qüestions algorísmiques clàssiques per al grup lliure a certes extensions naturals seves, com ara els grups parcialment commutatius (*right-angled Artin groups*) o els productes semidirectes de grups lliures.

El problema de resoldre equacions diofàntiques sobre els enters es redueix sovint al problema de trobar el conjunt de punts racionals en una corba algebraica. Malgrat grans esforços que es remunten fins a l'Antiga Grècia, encara no es coneix si existeix un algorisme general que donada l'equació d'una corba retorni el conjunt dels seus punts racionals, en cas que aquest sigui finit. De fet, encara que sapiguem que una certa corba algebraica té infinits punts racionals, calcular-ne un amb alguna propietat desitjada pot ser una tasca ben complicada. Per exemple, no es coneix encara cap algorisme capaç de calcular un punt d'ordre infinit en una corba el·líptica de rang positiu definida sobre $\mathbb{Q}$, problema estretament relacionat amb la famosa i encara oberta conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer.

Donada una corba algebraica X, podem intentar demostrar que no té punts racionals, és a dir, que $X(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Per a cada primer p, sigui $\mathbb{Q}_p$ la compleció de $\mathbb{Q}$ respecte a la distància p-àdica. Com que un punt en $X(\mathbb{Q})$ defineix un punt en $X(\mathbb{Q}_p)$ per a cada primer p i un punt en $X(\mathbb{R})$, és clar que si $X(\mathbb{R})$ és buit o existeix algun primer p tal que $X(\mathbb{Q}_p)$ és buit, aleshores $X(\mathbb{Q})$ també ha de ser buit. Quan això passa, es diu que *hi ha una obstrucció de tipus local-global* a l'existència de punts racionals en X. D'altra banda, es diu que una família de corbes satisfà el *principi local-global* (o *principi de Hasse*) si per a tota corba de la família es verifica que $X(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ si, i només si, $X(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset$ per a tot primer p i $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Quan X satisfà el principi de Hasse, es coneixen algorismes per a decidir si el conjunt $X(\mathbb{Q})$ és buit o no en un nombre finit de passos. Per exemple, d'acord amb el teorema de Hasse-Minkowski sabem que tota cònica definida sobre un cos de nombres satisfà el principi de Hasse. Tanmateix, hi ha molts contraexemples al principi de Hasse en la literatura. En els anys quaranta, Lindt i Reichardt, independentment, van trobar una de les primeres corbes per a les quals el principi de Hasse no es verifica. Aquesta corba ve definida per l'equació afí $y^2 = x^4 - 17$. Uns anys més tard, Selmer va provar que la corba definida per l'equació $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$ és també un contraexemple al principi de Hasse. Actualment, aquesta corba es coneix com la *cúbica de Selmer*.

El treball "Punts racionals en corbes de Shimura sobre cossos quadràtics imaginaris" tracta el cas de les corbes de Shimura, que durant les darreres dècades han esdevingut un objecte clau en diverses qüestions de modularitat, relacionades per exemple amb l'últim teorema de Fermat. L'objectiu del treball ha estat revisar els treballs de B. W. Jordan [Jor86] i A. N. Skorobogatov [Sko05] sobre l'existència de punts racionals en corbes de Shimura sobre cossos quadràtics imaginaris, i aportar un nou enfocament i un nou mètode que permet generalitzar-ne els resultats.

Suposem que B_D és una àlgebra de quaternions racional i indefinida de discriminant $D > 1$. Associada a B_D, existeix una corba algebraica projectiva i llisa $X_D/\mathbb{Q}$, que anomenem *corba de Shimura* (vegeu [Shi63], [Shi67]). Per un resultat clàssic de G. Shimura ([Shi75]), la corba X_D no té punts reals, és a dir $X_D(\mathbb{R}) = \emptyset$. En particular, $X_D(\mathbb{Q}) = \emptyset$. Aleshores, el següent pas en l'estudi de punts racionals en X_D sobre cossos de nombres és considerar el cas d'un cos quadràtic imaginari $K/\mathbb{Q}$. Segons la interpretació modular de X_D, els punts K-racionals de X_D parametritzen superfícies abelianes amb multiplicació quaterniònica per B_D definides sobre una clausura algebraica $\bar{\mathbb{Q}}$ del cos dels nombres racionals i amb *cos de mòduli* K, però que no necessàriament admeten un *model racional* sobre K. D'acord amb el treball de Jordan a [Jor86], les superfícies abelianes parametritzades per un punt $P \in X_D(K)$ admeten un model racional sobre K si, i només si, el cos K escindeix B_D, *i.e.* $B_D \otimes_{\mathbb{Q}} K \simeq \mathrm{M}_2(K)$. Sota aquesta hipòtesi, Jordan va donar condicions suficients explícites per tal que $X_D(K) = \emptyset$, produint així exemples de corbes de Shimura sense punts racionals sobre cossos quadràtics imaginaris (vegeu, per exemple, [Jor86, Theorem 6.3]). Per demostrar aquests resultats, Jordan es basa en la interpretació modular de X_D, i estudia certes representacions de Galois associades a les superfícies abelianes parametritzades per punts en $X_D(K)$. Fent ús de la caracterització de B. W. Jordan i R. Livné a [JL85] per a l'existència de punts locals en corbes de Shimura, del resultat de Jordan es dedueixen contraexemples al principi de Hasse sobre cossos quadràtics imaginaris.

Quan el cos quadràtic imaginari K no escindeix B_D, un punt $P \in X_D(K)$ es correspon a la classe d'isomorfisme d'una superfície abeliana amb multiplicació quaterniònica per B_D amb cos de mòduli K que *no* admet un model racional sobre K. En aquest cas, els resultats de [Jor86] no s'hi apliquen. De fet, si K no escindeix B_D i $X_D(K_v) \neq \emptyset$ per a tota plaça v de K, Jordan anomena *parell excepcional* al parell (B_D, K).

Un dels resultats principals del recent treball estableix condicions suficients explícites per a l'absència de punts racionals en el conjunt $X_D(K)$, sense suposar que K escindeix B_D. Les tècniques emprades són similars a les que apareixen a [Jor86] i [Sko05], però amb un nou enfocament que ens permet eliminar la hipòtesi $B_D \otimes_{\mathbb{Q}} K \simeq \mathrm{M}_2(K)$. Inspirats per les idees de J. S. Ellenberg i C. Skinner a [ES01], introduïm el concepte de *representació de Galois sobre el cos de mòduli* d'una superfície abeliana, que ens permet associar representacions del grup de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *als punts* en $X_D(K)$, en lloc de fer-ho a les superfícies abelianes que aquests punts parametritzen, i independentment de si aquestes superfícies admeten un model racional sobre K o no. Gràcies a aquesta diferència, els resultats del treball ens permeten produir exemples de parells excepcionals (B_D, K) tals que $X_D(K) = \emptyset$. Entre aquests contraexemples al principi de Hasse desconeguts fins ara trobem, per exemple, els parells excepcionals següents:

$$(B_{2\cdot 19}, \mathbb{Q}(\sqrt{-39})), \qquad (B_{2\cdot 29}, \mathbb{Q}(\sqrt{-15})),$$

$$(B_{2\cdot 31}, \mathbb{Q}(\sqrt{-87})), \qquad (B_{2\cdot 37}, \mathbb{Q}(\sqrt{-15})),$$

$$(B_{2\cdot 43}, \mathbb{Q}(\sqrt{-15})).$$

L'estudi del principi de Hasse per a corbes algebraiques, i en particular el descobriment de nous contraexemples a aquest principi local-global, està estretament lligat a una conjectura atribuïda a B. Poonen [Poo06], segons la qual l'única obstrucció al principi de Hasse sobre cossos de nombres per a certes famílies de corbes algebraiques és l'anomenada *obstrucció de Brauer-Manin*. De la interpretació dels resultats de Jordan en termes de descens per Skorobogatov [Sko05] se segueix que els contraexemples al principi de Hasse deduïts a [Jor86] estan explicats per l'obstrucció de Brauer-Manin. De la mateixa manera, aquesta obstrucció també explica els nous contraexemples al principi de Hasse aportats pel recent treball.

Per últim, cal destacar que les tècniques i les idees introduïdes en el nostre treball s'apliquen també a l'estudi de punts racionals en certs *quocients d'Atkin-Lehner de corbes de Shimura*. Les corbes de Shimura estan dotades d'un grup d'involucions naturals, les anomenades *involucions d'Atkin-Lehner*, i el quocient d'una corba de Shimura X_D per l'acció d'una d'aquestes involucions pot tenir punts racionals, malgrat $X_D(\mathbb{Q}) = \emptyset$. L'absència de punts racionals en aquests quocients està relacionada amb certes conjectures de finitud sobre les possibles àlgebres d'endomorfismes d'una superfície abeliana, i el seu estudi és part d'un projecte de recerca actualment en desenvolupament i en el qual ja s'han obtingut alguns resultats satisfactoris.

Referències

[ES01] J. S. Ellenberg, C. Skinner. "On the modularity of $\mathbb{Q}$-curves". *Duke Math. J.*, **109** (2001), 97–122.

[Jor86] B. W. Jordan. "Points on Shimura curves rational over number fields". *J. Reine Angew. Math.*, **371** (1986), 92–114.

[JL85] B. Jordan, J. Livné. "Local diophantine properties of Shimura curves". *Math. Ann.*, **270** (1985), 235–248.

[Poo06] B. Poonen. "Heuristics for the Brauer-Manin obstruction for curves". *Experimental Math.*, **15:4** (2006), 415–420.

[Shi63] G. Shimura. "On analyitic families of polarized abelian varieties and automorphic functions". *Ann. Math.*, **78** (1963), 149–192.

[Shi67] G. Shimura. "Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves". *Ann. of Math.*, **85** (1967), 58–159.

[Shi75] G. Shimura. "On the real points of an arithmetic quotient of a bounded symmetric domain". *Math. Ann.*, **215** (1975), 135–164.

[Sko05] A. Skorobogatov. "Shimura coverings of Shimura curves and the Manin obstruction". *Math. Res. Lett.*, **12** (2005), 779–788.